514. 河田氏ノ論文，其ノ他

浅野啓三（阪大）

本紙109号ニ於テ河田君ハ二ツノ有限次代数体ノ *Kompositum* ノ *Hauptordnung* ガ各々ノ *Hauptordnung* ノ *Kompositum* ニナルタメノ必充條件ヲ論ゼラレタ、ソレハ *im Kleinen* ニ於テ條件ヲ求メ *im Grossen* ニ移ルノデアル。*im Grossen* デ條件ヲ云ヒ表ハス場合 *Relativdiskriminante* ガ使用サレテヰルガ、ソレハ *Relativdifferente* ニスベキデアル。*Relativdiskriminante* ヲ用キタノデハ必充條件ガウマク表ハシ得ナイヤウニ思ハレル、又 *im Kleinen* デ條件ヲ出ス場合ノ証明（上記論文［B］ノ必要條件ノ証明）ニ於テハ、今少シ $\mathfrak{P}$-*adischer Zahlkörper* ノ構造ニ立入ッテ考察スル必要ガアリ、アル様ニ *elementar* ニハ証明ガ完成シナイデアロウト思ハレル、河田君ノ最後ノ

結果ハ Diskriminante ヲ Differente ニ直セバヨイ。

次ニ補正ノ意味デ一應証明ヲ試ミル。

定理. Kヲ $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, K_1, K_2ヲソノ Unterkörper トシ, $K=K_1K_2$, $k=K_1\cap K_2$ トスル. K, K_1, K_2 ノ Hauptordnung ヲ夫々 $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ トスルトキ $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_1\cdot\mathfrak{O}_2$ トナルタメ必要且ツ充分ナ條件ハ K/K_1 又ハ K/K_2 が Unverzweigt デ且ツ $f=\frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$ トナルコトデアル. コヽニ f, f_1, f_2 ハ夫々 $K/k, K_1/k, K_2/k$ ノ Restklassengrad トスル。

証明: $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_1\cdot\mathfrak{O}_2$ トスル. $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ ノ Primideal ヲ $\mathfrak{P}=(\pi)$, $\mathfrak{P}_1=(\pi_1)$, $\mathfrak{P}_2=(\pi_2)$ トスレバ

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}=\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2/\mathfrak{P}=(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{O}_2/\mathfrak{P}_2)$$

コレカラ $f=\dfrac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$ ヲ得ル、次ニ K_1, K_2 ノ Trägheitskörper ヲ W_1, W_2 トスレバ $K_1=W_1(\pi_1)$, $K_2=W_2(\pi_2)$, W_1/k, W_2/k ハ unverzweigt, zyklisch デ Restklassengrad ハ夫々 f_1, f_2 ニ等シイ. $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$ カラ

$$\pi=\sum_i \alpha_i\beta_i \qquad \alpha_i\in\mathfrak{O}_1,\ \beta_i\in\mathfrak{O}_2$$

$$\alpha_i\equiv\alpha_{i0}\ (\pi_1), \qquad \beta_i\equiv\beta_{i0}\ (\pi_2)$$

α_{i0}, β_{i0} ハ夫々 W_1, W_2 ノ ganzes Element.

$$(\pi_1)=(\pi^{e_1}),\quad \pi_2=(\pi^{e_2}),\quad e'=Min(e_1, e_2)>1$$

トスレバ

$$\pi\equiv\sum_i \alpha_{i0}\beta_{i0}\quad(\pi^{e'}),\quad \sum_i \alpha_{i0}\beta_{i0}\equiv 0\quad(\pi)$$

$\sum_i \alpha_{i0}\beta_{i0}\in W_1W_2$ デ W_1W_2/k ハ *unverzweigt* デアルカラ

$$\sum_i \alpha_{i0}\beta_{i0}\equiv 0\quad(\pi^{e})$$

e ハ K/k ノ *Verzweigungsordnung* デ $e\geqq e'$.
故ニ

$$\pi\equiv\sum_i \alpha_{i0}\beta_{i0}\equiv 0\quad(\pi^{e'})\qquad e'>1.$$

従ツテ $e'=1$ デナケレバナラナイ。即チ K/K_1 又ハ K/K_2 ハ *unverzweigt*.

逆ニ $e'=1$, $f=\dfrac{f_1f_2}{(f_1,f_2)}$ トスレバ $\mathfrak{O}/\mathfrak{z}=(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{z}_1)\cdot(\mathfrak{O}_2/\mathfrak{z}_2)$ ガ成立シ $\mathfrak{P}$ ノ *Primelement* π ガ $\mathfrak{O}_1$ 又ハ $\mathfrak{O}_2$ ノ中ニトレル。

此ノコトカラ $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_1\cdot\mathfrak{O}_2$ ヲ得ル。　（証明終リ）

次ニ *im Grossen* ニ移ル、今度ハ K ヲ *endlicher algebraischer Zahlkörper*, K_1, K_2 ヲ K ノ *Unterkörper* トシ $K=K_1K_2$, $k=K_1\cap K_2$ トスル。K, K_1, K_2, k ノ *Hauptordnung* ヲ夫々 $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{o}$ トシ $\mathfrak{O}$ ノ *Primideal* ヲ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ デ割レル $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{o}$ ノ *Primideal* ヲ夫々 $\mathfrak{p}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$, ヲデ表ハス、又 $f_{\mathfrak{P}}$, $f_{\mathfrak{P}_1}$, $f_{\mathfrak{P}_2}$ デ以テ K/k, K_1/k, K_2/k ノ $\mathfrak{p}$-*grad* ヲ示ス。

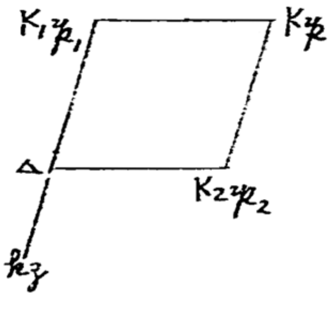
定理： $O=O_1O_2$ トナルタメ必要且ツ充分ナ條件ハ

$(\mathfrak{D}_{K/K_1},\mathfrak{D}_{K/K_2})=1$, $\mathfrak{p}\,\Big|\,\dfrac{\mathfrak{D}_{K/k}}{\mathfrak{D}_{K/K_1}\mathfrak{D}_{K/K_2}}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ関シテ

$f_\mathfrak{p}=\dfrac{f_{\mathfrak{p}_1}f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1},f_{\mathfrak{p}_2})}$ トナルコトデアル。(*) コヽニ $\mathfrak{D}_{K/k}$ 等ハ K/k ノ Differente トスル。

証明： $O=O_1O_2$ トスル．$\mathfrak{p}$ ヲ O ノ任意ノ Primideal トシ $\mathfrak{p}$-adisch ニ移ル．$K_\mathfrak{p}=K_{1\mathfrak{p}_1}\cdot K_{2\mathfrak{p}_2}$, $O_\mathfrak{p}=(O_1O_2)_\mathfrak{p}=O_{1\mathfrak{p}_1}O_{2\mathfrak{p}_2}$．$O_\mathfrak{p}$ 等ハ O ノ $\mathfrak{p}$-adische Grenzmenge トスル．

(*) $\dfrac{\mathfrak{D}_{K/k}}{\mathfrak{D}_{K/K_1}\mathfrak{D}_{K/K_2}}$ ノ Primteiler ニナラナイ $\mathfrak{p}$ ニツイテハ次ニ示ス様ニ $f_\mathfrak{p}=\dfrac{f_{\mathfrak{p}_1}f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1},f_{\mathfrak{p}_2})}$ ノ成立スルコトガ証明サレル．Primteiler ニナルモノニツイテハ不明デアルカラ條件ノ中ニ入レテオクワケデアル．$\mathfrak{D}_{K/K_1}\mathfrak{D}_{K_1/k}=\mathfrak{D}_{K/K_2}\mathfrak{D}_{K_2/k}=\mathfrak{D}_{K/k}$, $(\mathfrak{D}_{K_1/k},\mathfrak{D}_{K_2/k})=1$ カラ $\dfrac{\mathfrak{D}_{K/k}}{\mathfrak{D}_{K/K_1}\mathfrak{D}_{K/K_2}}=(\mathfrak{D}_{K_1/k},\mathfrak{D}_{K_2/k})$ $\mathfrak{p}$ ガ Teiler デナイトスレバ $\mathfrak{p}_1$ 又ハ $\mathfrak{p}_2$ ハ über k unverzweigt デアル．$\mathfrak{p}$-adisch デ考ヘルト $K_{1\mathfrak{p}_1}/k_\mathfrak{z}$ 又ハ $K_{2\mathfrak{p}_2}/k_\mathfrak{z}$ ガ unverzweigt, zyklisch．今前者ガ unverzweigt トスル $K_\mathfrak{p}/K_{2\mathfrak{p}_2}$ ハ勿論 unverzweigt



デアルカラ $K_\mathfrak{p}$, $K_{1\mathfrak{p}_1}$, $K_{2\mathfrak{p}_2}$ ノ $k_\mathfrak{z}$ ノ上ノ Verzweigungsordnung ヲ夫々 $e_\mathfrak{p}$, $e_{\mathfrak{p}_1}$, $e_{\mathfrak{p}_2}$ トスレバ $e_\mathfrak{p}=e_{\mathfrak{p}_2}$, $e_{\mathfrak{p}_1}=1$.

$$e_\mathfrak{p}f_\mathfrak{p}=(K_\mathfrak{p}:k_\mathfrak{z})=(K_\mathfrak{p}:K_{2\mathfrak{p}_2})(K_{2\mathfrak{p}_2}:k_\mathfrak{z})$$
$$=(K_{1\mathfrak{p}_1}:\Delta)e_{\mathfrak{p}_2}f_{\mathfrak{p}_2}$$

$\Delta=K_{1\mathfrak{p}_1}\cap K_{2\mathfrak{p}_2}$．$\Delta$ ハ $k_\mathfrak{z}$ ノ上デ unverzweigt デアリ $K_{1\mathfrak{p}_1}=W_1$ ト $K_{2\mathfrak{p}_2}$ ノ Trägheitskörper W_2 トノ Durchschnitt ニナルカラ

$(\Delta:k_\mathfrak{z})=(f_{\mathfrak{p}_1},f_{\mathfrak{p}_2})$

故ニ $f_\mathfrak{p}=(K_{1\mathfrak{p}_1}:\Delta)f_{\mathfrak{p}_2}=\dfrac{(K_{1\mathfrak{p}_1}:k_\mathfrak{z})f_{\mathfrak{p}_2}}{(\Delta:k_\mathfrak{z})}=\dfrac{f_{\mathfrak{p}_1}f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1},f_{\mathfrak{p}_2})}$

$\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{O}_{1\mathfrak{p}_1}$, $\mathfrak{O}_{2\mathfrak{p}_2}$ ハ夫々 $K_{\mathfrak{P}}$, $K_{1\mathfrak{p}_1}$, $K_{2\mathfrak{p}_2}$ ノ Hauptordnung ニナルカラ前定理ニヨリ $K_{\mathfrak{P}}/K_{1\mathfrak{p}_1}$ 又ハ $K_{\mathfrak{P}}/K_{2\mathfrak{p}_2}$ ノ何レカハ unverzweigt. $f_{\mathfrak{P}} = \dfrac{f_{\mathfrak{p}_1} f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})}$. $\mathfrak{P}$ ハ任意ダカラ $(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1$.

逆ニ定理ノ條件ガ成立スルモノトスル。各々ノ $\mathfrak{P}$ ニツイテ $K_{\mathfrak{P}}/K_{1\mathfrak{p}_1}$ 又ハ $K_{\mathfrak{P}}/K_{2\mathfrak{p}_2}$ ハ unverzweigt デアリ、且ツ $f_{\mathfrak{P}} = \dfrac{f_{\mathfrak{p}_1} f_{\mathfrak{p}_2}}{(f_{\mathfrak{p}_1}, f_{\mathfrak{p}_2})}$ ガ成立スル $\dfrac{D_{K/k}}{D_{K/K_1} D_{K/K_2}}$ ノ Primteiler ニツイテハ仮定シテアルシ、Primteiler ニナラナイモノニツイテハ此ノ関係ガ成立スルコトガ証明出来ルカラ前定理ニヨリ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{O}_{1\mathfrak{p}_1} \mathfrak{O}_{2\mathfrak{p}_2} = (\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2)_{\mathfrak{P}}$. コレガスベテノ $\mathfrak{P}$ ニツイテ成立スルカラ im Grossen ニ於テモ $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1 \cdot \mathfrak{O}_2$. (証明終リ)

次ニ問題ハ少シ違フガ、$\mathfrak{A}$ ヲ代数体 k ノ有限次拡大体トシ $\mathfrak{A}$ ヲ k ノ上ノ einfache Algebra ト見ナシ. Körper k ヲ K マデ擴大スルトキ $\mathfrak{A}_K = \mathfrak{A} \times K$ ハ一般ニハ halbeinfach ニナルノデアルガ、ソノ Maximalordnung $\mathfrak{O}$ ガ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{O}_K$ トナルタメノ條件如何ヲ考ヘル。

$\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{O}_K$ ハ夫々 $\mathfrak{A}$, K ノ Hauptordnung デアル.(前述ノ場合デ K_1, K_2 ノ Kompositum ガ k ノ上ノ direktes Produkt ニナル場合、例ヘバ K_1, K_2 ノ少クトモ一方ガ

galoisch ニナルマウナ場合ガコレニ含マレルワケデアル)
此ノ場合ニハ結果ハ簡単デ次ノ定理ヲ得ル。

定理: $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{O}_{K}$ トナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, $(\vartheta_{\mathfrak{a}}, \vartheta_{K}) = 1$. $\vartheta_{\mathfrak{a}}, \vartheta_{K}$ ハ夫々 $\mathfrak{a}/k$, K/k ノ *Relativdiskriminante* デアル。

証明: $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{O}_{K}$ トスル. $\mathfrak{O}_{\mathfrak{a}}$ ガ k ノ *Hauptordnung* $\mathfrak{o}$ ニ對シテ *Minimalbasis* $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n$ ヲ有スルナラバ、ソレハ $\mathfrak{O}$ ノ $\mathfrak{O}_K$ ニ關スル *Minimalbasis* ニナル. $\alpha \in \mathfrak{a}$ トスレバ

$$S(\alpha) = S_{\mathfrak{a}/k}(\alpha) = S_{\mathfrak{a}_K/K}(\alpha) \quad (\textit{reguläre}$$

Darstellung ノ *Spur*)

$\omega_1, \cdots\cdots, \tilde{\omega}_n$ ノ *komplementare Basis*

$$(\tilde{\omega}_1, \cdots\cdots, \tilde{\omega}_n) = (\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)(S(\omega_i \omega_j))^{-1}$$

ハ $\mathfrak{a}/k$ 及ビ $\mathfrak{a}_K/K$ ノ *Differente* ノ逆 *Ideal* ノ *Minimalbasis* ヲ作ルカラ

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{a}_K/K} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{a}/k} \cdot \mathfrak{O}_K$$

同様ニ $\mathfrak{D}_{\mathfrak{a}_K/\mathfrak{a}} = \mathfrak{D}_{K/k} \cdot \mathfrak{O}_{\mathfrak{a}}$.

$\mathfrak{O}_{\mathfrak{a}}$ ガ $\mathfrak{o}$ ニ關スル *Minimalbasis* ヲモタナイトキデモ, k ノ *ganzes Ideal* $\mathfrak{m}$ ヲ適當ニトッテ (例ヘバ $\mathfrak{a}_K/k$ ノ *Diskriminantenprimteiler* ヲスベテ含ムヤウナ *Ideal*) *zu* $\mathfrak{m}$ *ganz* ナ數ヲ考察スレバヤハリ上ノ結果ヲ得ル。

$\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{O}$ ノ任意ノ *Primideal* トシ、$\mathfrak{p}$-*adisch* ニ移リ, 對應スル $\mathfrak{p}$-*adische Grenzmenge* ヲ $\overline{\mathfrak{a}}_K$,

$\overline{\mathfrak{A}}, \overline{K}$, 等デ示ス、コレラハ皆 Körper ニナル。(*)

$$\overline{\mathfrak{A}_K} = \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{K}, \quad \overline{\mathfrak{O}} = \overline{\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}} \cdot \overline{\mathfrak{O}_K}$$

デ $\overline{\mathfrak{O}}, \overline{\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}}, \overline{\mathfrak{O}_K}$ ハ夫々 $\overline{\mathfrak{A}_K}, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{K}$ ノ Hauptordnung ニナルカラ $\overline{\mathfrak{A}_K}/\overline{\mathfrak{A}}$ 又ハ $\overline{\mathfrak{A}_K}/\overline{K}$ ノ何レカハ unverzweigt.

即チ $\mathfrak{A}_K$ ノ中デ考ヘテ

$$(D_{\mathfrak{A}_K/K}, D_{\mathfrak{A}_K/\mathfrak{A}}) = (D_{\mathfrak{A}/k} \cdot \mathfrak{O}_K, D_{K/k} \cdot \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}) = 1$$

Λヲ Kヲ含ム k ノ上ノ galois 体トシ $\mathfrak{A}_\Lambda$ ノ中ニ einbetten シテ考ヘルコトニスレバ、此ノ中デ

$$(D_{\mathfrak{A}/k}, D_{K/k}) = 1$$

Kヲソノ konjugierter Körper $K^{(\nu)}$ ニ移ス。Λ/k ノ Automorphismus (ソレハ $\mathfrak{A}_\Lambda$ ノ Automorphismus ヲ定義スル) ヲ行ッテ考ヘルト $\mathfrak{A}_K^{(\nu)}$ ノ Maximalordnung ハ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{O}_K^{(\nu)}$ ニナリ,

$$(D_{\mathfrak{A}/k}, D_{K^{(\nu)}/k}) = 1$$

$\vartheta_{K/k} = \prod_\nu D_{K^{(\nu)}/k}$ デアルカラ

$$(D_{\mathfrak{A}/k}, \vartheta_{K/k}) = 1$$

故ニ

$$(\vartheta_{\mathfrak{A}/k}, \vartheta_{K/k}) = 1$$

此ノ條件ガ充分ナコトノ証明ハ formal ナ Diskriminante ニ関スル計算カラ容易ニ得ラレル。

(*) Deuring, algebren, S. 98